

# Colles de Maths - semaine 5 - MP\*1

## Lycée du Parc

Julien Allasia - ENS de Lyon

### Compacité

**Exercice 1** (\*\*) Soit  $K$  un compact (dans un espace vectoriel normé ou métrique) et  $f : K \rightarrow K$  telle que

$$\forall x \neq y \in K, \quad d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

Montrer que  $f$  possède un unique point fixe  $\alpha$  et que si  $x_0 \in K$ ,  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $(x_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $\alpha$ .

**Exercice 2** (\*\*\*) On note  $\ell^1(\mathbb{N}) = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n| < \infty \right\}$ , qu'on munit de  $\|u\|_{\ell^1} = \sum |u_n|$ .

Soit  $a, b \in \ell^1(\mathbb{N})$  telles que  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n$ . On définit

$$K = \{(u_n)_n \in \ell^1(\mathbb{N}), \forall n, a_n \leq u_n \leq b_n\}.$$

Montrer que  $K$  est un compact de  $\ell^1(\mathbb{N})$ .

### Topologie des espaces vectoriels normés de dimension finie

**Exercice 3** (\*)

1. Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  non constant. Montrer que l'image par  $P$  de tout fermé de  $\mathbb{C}$  est un fermé de  $\mathbb{C}$ .
2. Généralisation : Soit  $E, F$  deux espaces vectoriels normés de dimension finie. Soit  $f : E \rightarrow F$  une application continue telle que pour tout  $K$  compact de  $F$ ,  $f^{-1}(K)$  est un compact de  $E$ . Montrer que l'image par  $f$  de tout fermé de  $E$  est un fermé de  $F$ .

**Exercice 4** (\*\*) Soit  $E, F$  des espaces vectoriels normés de dimension finie,  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ .

Montrer que s'équivalent :

- (i) Pour tout  $O \subset E$  ouvert,  $u(O)$  est ouvert ;
- (ii) Il existe  $O \subset E$  ouvert non vide tel que  $u(O)$  est ouvert ;
- (iii)  $u$  est surjective.

**Exercice 5** (\*\*) Soit  $(E, N)$  un espace normé de dimension finie et  $X$  une partie bornée de  $E$ . Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimal contenant  $X$ . Cette boule est-elle unique ?

*Indication : Pour l'unicité, traiter séparément le cas des normes euclidiennes.*

### Connexité par arcs

**Exercice 6** (\*) Existe-t-il une fonction continue injective de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  pour  $n \geq 2$  ?

**Exercice 7** (\*) Soit  $E$  un espace vectoriel normé réel. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

1. On suppose que  $E$  est de dimension finie. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $F$  pour que  $E \setminus F$  soit connexe par arcs.
2. (Généralisation, \*\*\*) On ne suppose plus  $E$  de dimension finie. Montrer que  $E \setminus F$  est connexe par arcs si et seulement si  $F$  n'est pas un hyperplan fermé.

*On pourra admettre qu'une forme linéaire est continue si et seulement si son noyau est fermé. Noter que si  $H$  n'est pas fermé, il est dense, car  $\bar{H}$  est aussi un sous-espace vectoriel de  $E$ .*

**Exercice 8** (\*\*) On admet le théorème de Riesz : la sphère unité d'un espace vectoriel normé de dimension infinie n'est pas compacte.

Soit  $E$  un espace vectoriel normé de dimension infinie et  $K$  un compact de  $E$ . Montrer que  $E \setminus K$  est connexe par arcs.

**Exercice 9** (\*\*\*) Soit  $E$  un espace vectoriel normé de dimension finie,  $\Omega$  un ouvert connexe par arcs non vide de  $E$  tel que  $\bar{\Omega}$  est compact. Soit  $f : \Omega \rightarrow \Omega$  une fonction continue telle que  $f(\Omega)$  est ouvert. Montrer qu'il existe  $x_0 \in \Omega$  tel que  $d(x_0, \partial\Omega) = d(f(x_0), \partial\Omega)$ .

*On pourra admettre qu'un ensemble connexe par arcs est connexe, c'est-à-dire qu'il ne peut s'écrire comme réunion de deux ouverts non vides disjoints.*

*Indications : Commencer par montrer qu'il existe  $x$  tel que  $d(x, \partial\Omega) \geq d(f(x), \partial\Omega)$ . Ensuite, pour montrer qu'il existe  $x$  tel que  $d(x, \partial\Omega) \leq d(f(x), \partial\Omega)$ , raisonner par l'absurde et :*

1. Montrer que  $f(\Omega)$  est un fermé relatif de  $\Omega$  ;
2. En déduire que  $f$  est surjective ;
3. Réutiliser le premier point de la preuve pour conclure à une contradiction.