

Colles de Maths - semaine 5 - MP*1

Lycée du Parc

Julien Allasia - ENS de Lyon

Compacité

Exercice 1 (**) Soit K un compact (dans un espace vectoriel normé ou métrique) et $f : K \rightarrow K$ telle que

$$\forall x \neq y \in K, \quad d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

Montrer que f possède un unique point fixe α et que si $x_0 \in K$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers α .

Exercice 2 (***) On note $\ell^1(\mathbb{N}) = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n| < \infty \right\}$, qu'on munit de $\|u\|_{\ell^1} = \sum |u_n|$.

Soit $a, b \in \ell^1(\mathbb{N})$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n$. On définit

$$K = \{(u_n)_n \in \ell^1(\mathbb{N}), \forall n, a_n \leq u_n \leq b_n\}.$$

Montrer que K est un compact de $\ell^1(\mathbb{N})$.

Topologie des espaces vectoriels normés de dimension finie

Exercice 3 (*)

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer que l'image par P de tout fermé de \mathbb{C} est un fermé de \mathbb{C} .
2. Généralisation : Soit E, F deux espaces vectoriels normés de dimension finie. Soit $f : E \rightarrow F$ une application continue telle que pour tout K compact de F , $f^{-1}(K)$ est un compact de E . Montrer que l'image par f de tout fermé de E est un fermé de F .

Exercice 4 (**) Soit E, F des espaces vectoriels normés de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Montrer que s'équivalent :

- (i) Pour tout $O \subset E$ ouvert, $u(O)$ est ouvert ;
- (ii) Il existe $O \subset E$ ouvert non vide tel que $u(O)$ est ouvert ;
- (iii) u est surjective.

Exercice 5 (**) Soit (E, N) un espace normé de dimension finie et X une partie bornée de E . Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimal contenant X . Cette boule est-elle unique ?

Indication : Pour l'unicité, traiter séparément le cas des normes euclidiennes.

Connexité par arcs

Exercice 6 (*) Existe-t-il une fonction continue injective de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} pour $n \geq 2$?

Exercice 7 (*) Soit E un espace vectoriel normé réel. Soit F un sous-espace vectoriel de E .

1. On suppose que E est de dimension finie. Donner une condition nécessaire et suffisante sur F pour que $E \setminus F$ soit connexe par arcs.
2. (Généralisation, ***) On ne suppose plus E de dimension finie. Montrer que $E \setminus F$ est connexe par arcs si et seulement si F n'est pas un hyperplan fermé.

On pourra admettre qu'une forme linéaire est continue si et seulement si son noyau est fermé. Noter que si H n'est pas fermé, il est dense, car \bar{H} est aussi un sous-espace vectoriel de E .

Exercice 8 (**) On admet le théorème de Riesz : la sphère unité d'un espace vectoriel normé de dimension infinie n'est pas compacte.

Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie et K un compact de E . Montrer que $E \setminus K$ est connexe par arcs.

Exercice 9 (***) Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, Ω un ouvert connexe par arcs non vide de E tel que $\bar{\Omega}$ est compact. Soit $f : \Omega \rightarrow \Omega$ une fonction continue telle que $f(\Omega)$ est ouvert. Montrer qu'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $d(x_0, \partial\Omega) = d(f(x_0), \partial\Omega)$.

On pourra admettre qu'un ensemble connexe par arcs est connexe, c'est-à-dire qu'il ne peut s'écrire comme réunion de deux ouverts non vides disjoints.

Indications : Commencer par montrer qu'il existe x tel que $d(x, \partial\Omega) \geq d(f(x), \partial\Omega)$. Ensuite, pour montrer qu'il existe x tel que $d(x, \partial\Omega) \leq d(f(x), \partial\Omega)$, raisonner par l'absurde et :

1. Montrer que $f(\Omega)$ est un fermé relatif de Ω ;
2. En déduire que f est surjective ;
3. Réutiliser le premier point de la preuve pour conclure à une contradiction.